苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由*

五次方程式经 Abel, Galois 之证明后, 一般算学者均认为不可以代数解矣, 而《学艺》七卷十号载有苏君之 “代数的五次方程式之解法” 一文, 罗欣读之而研究之, 于去年冬亦仿得 “代数的六次方程式之解法” 矣. 罗对此欣喜异常, 意为果能成立, 则于算学史中亦可占一席地也, 惟自思若不将 Abel 言论驳倒, 终不能完全此种理论, 故罗沉思于 Abel 之论中, 凡一阅月, 见其条例精严, 无懈可击, 后经本社编辑员之暗示, 遂从事于苏君解法确否之工作, 于六月中遂得其不能成立之理由, 罗安敢自秘, 特公之于世, 尚祈示正焉.

解 法 简 述

用 Sylvester 之分离消去法 (diabylic method of elemination) 将普通形

$$x^5+p_1x^4+p_2x^3+p_3x^2+p_4x+p_5=0$$

化为可解形 $X^5+P_1X^4+P_2X^3+P_3X^2+P_4X+P_5=0$ (中有 $P_1=0, P_3=0, P_2^2=5P_4$), 而 x, X 有 $X=n_0+n_1x+n_2x^2+n_3x^3+n_4x^4$ 之关系. P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 为 n_0, n_1, n_2, n_3, n_4 之一次、二次、三次、四次、五次齐次函数. $P_1=0$, 即 n_0 可以 n_1, n_2, n_3, n_4 之一齐次函数表之, 以之代入 P_2, P_3, P_4, P_5, 则得 n_1, n_2, n_3, n_4 之二、三、四、五次齐次函数, 而 P_3 之一般形可写为

$$\begin{aligned}&A_1n_1^3+A_2n_2^3+A_3n_3^3+A_4n_4^3+A_5n_1^2n_2+A_6n_1^2n_3+A_7n_1^2n_4+A_8n_2^2n_1+A_9n_2^2n_3\\&+A_{10}n_2^2n_4+A_{11}n_3^2n_5+A_{12}n_3^2n_2+A_{13}n_3^2n_4+A_{14}n_4^2n_1+A_{15}n_4^2n_2+A_{16}n_4^2n_3\\&+A_{17}n_1n_2n_3+A_{18}n_1n_2n_4+A_{19}n_1n_2n_4+A_{20}n_2n_3n_4, \qquad \text{(I)}\end{aligned}$$

式中 $A_1, \cdots, A_{20}$ 为 $p_1, \cdots, p_5$ 之函数为已知者.

若令等于下式

$$\begin{aligned}&(a_1n_1+a_2n_2)(a_3n_1^2+a_4n_2^2+a_5n_3^2+a_6n_4^2+a_7n_1n_2+a_8n_1n_3+a_9n_1n_4+a_{10}n_2n_3\\&+a_{11}n_2n_4+a_{12}n_3n_4)+(a_{13}n_3+a_{14}n_4)(a_{15}n_1^2+a_{16}n_2^2+a_{17}n_3^2+a_{18}n_4^2+a_{19}n_1n_2\\&+a_{20}n_1n_3+a_{21}n_1n_4+a_{22}n_2n_3+a_{23}n_2n_4+a_{24}n_3n_4), \qquad \text{(II)}\end{aligned}$$

式中 $a_1, \cdots, a_{24}$ 为未定系数.

* 科学, 1930, **15**: 307-309.

再设 $a_1n_1+a_2n_2=0, a_{13}n_3+a_{14}n_4=0$, 代入 $P_2^2=5P_4$ 式中, 则此式为 n_2,n_4 之四次齐次函数, 解之, 则得 n_2,n_4 之比值, 由此可作得 $n_0:n_1:n_2:n_3:n_4$ 之值, 故普通形可化为上之可解形, 换言之, 即五次方程式可得而解矣.

谬　误　点

罗研究上意知其谬误在 P_3 中, 即 (I) 不能等于 (II) 也. 夫求未定系数 $a_1,\cdots,a_{24}$, 原文亦有求之之二十方程式, 罗为便利讨探计, 特分之为四类, 转录于下:

(一) $a_1a_3=A_1,\qquad a_2a_4=A_2,$

$a_3a_2+a_1a_7=A_5,\qquad a_4a_1+a_2a_7=A_8;$

(二) $a_{13}a_{17}=A_3,\qquad a_{14}a_{18}=A_4,$

$a_{17}a_{14}+a_{13}a_{24}=A_{13},\qquad a_{18}a_{13}+a_{14}a_{24}=A_{16};$

(三) $a_{13}a_{15}+a_1a_3=A_6,\qquad a_{14}a_{15}+a_1a_9=A_7,$

$a_1a_{11}+a_2a_9=a_{18}-a_{14}a_{19},\qquad a_2a_{11}+a_{14}a_{16}=A_{10},$

$a_2a_{10}+a_{13}a_{16}=A_9,\qquad a_1a_{10}+a_2a_8=a_{17}-a_{13}a_{19};$

(四) $a_1a_5+a_{13}a_{20}=A_{11},\qquad a_2a_5+a_{13}a_{22}=A_{12},$

$a_2a_{12}+a_{14}a_{22}=A_{19}-a_{13}a_{23},\qquad a_1a_{12}+a_{13}a_{21}=A_{20}-a_{14}a_{20},$

$a_1a_6+a_{14}a_{21}=A_{14},\qquad a_2a_6+a_{14}a_{23}=A_{15}.$

依原所谓假 a_7,a_{24} 则由 (一), (二) 得 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_{13},a_{14},a_{17},a_{18}$ 之值, 则第二类乃为 $a_8,a_{15},a_9,a_{11},a_{16},a_{10}$ 之联立一次方程式 (设 a_{19} 为已知), 以行列式解之, 知其各分母悉为

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{14} & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}.$$

然

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{14} & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} a_{14} & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$-a_{13}\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = 0,$$

而 $a_8, a_{15}, a_9, a_{11}, a_{16}, a_{10} = \delta/\Delta$.

因 $\Delta = 0$, 故 $a_8, a_{15}, a_9, a_{11}, a_{16}, a_{10}$ 非不定即无限大, 故 (I) 等 (II) 之谬论不攻自破矣. 换言之, 即 P_3 为零不能解得二一次式, 故此法亦不能解五次方程式也.

PDG